

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

**Министерство высшего и среднего специального образования  
Республики Узбекистан**

**Филиал Российского государственного университета нефти и газа  
имени И.М. Губкина в г. Ташкенте**

**«УТВЕРЖДАЮ»**  
  
**Первый заместитель директора  
Логунов В.П.**  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.



## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Дифференциальные уравнения. Функции нескольких переменных**

Направление подготовки  
131000 «Нефтегазовое дело»

Профиль подготовки  
Все профили

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Форма обучения  
Очная

Ташкент 2015

## **1. Цели освоения дисциплины**

Дисциплина «*Функции многих переменных и дифференциальные уравнения*» создает универсальную базу для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, закладывает фундамент последующего обучения в магистратуре и аспирантуре. Она даёт цельное представление о возможностях изучения законов окружающего мира на языке теорем и формул, помогает бакалаврам необходимыми знаниями для решения научно-технических задач в теоретических и прикладных аспектах.

Целью изучения дисциплины «*Функции многих переменных и дифференциальные уравнения*» также является познакомить и научить студентов пользоваться основным кругом понятий и результатов, рассматриваемых в изучаемых курсах, привить им соответствующую математическую культуру и дать необходимый аппарат для изучения других естественнонаучных дисциплин, а также решения прикладных задач.

Дисциплина «*Функции многих переменных и дифференциальные уравнения*» предназначена и для приобретения навыков строго научного анализа ситуаций, с которыми бакалавру придется сталкиваться при создании новых технологий в процессе дальнейшей работы по специальности. Именно математические методы, развитые в современном естествознании, по сути, лежат в основе преподавания всех дисциплин общеинженерного цикла, а также во многих дисциплинах специализации.

Дисциплина «*Функции многих переменных и дифференциальные уравнения*» помогает решать задачу формирования у студента научного мировоззрения.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП ВПО**

Дисциплина «*Функции многих переменных и дифференциальные уравнения*» представляет собой дисциплину математического и естественно научного цикла дисциплин и читается в 3 семестре.

Дисциплина базируется на курсах «Дифференциальное исчисление и аналитическая геометрия», «Интегральное исчисление и ряды» и формирует знания студентов для освоения всех дисциплин естественно-научного цикла (Б.2) и дисциплин профессионального цикла (Б.3).

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.**

В процессе освоения ООП ВПО, реализующей ФГОС ВПО данной дисциплины, бакалавр формирует и демонстрирует следующие общекультурные и общепрофессиональные компетенции:

#### *Общекультурные компетенции (ОК)*

- обобщать, анализировать, воспринимать информацию, ставить цели и выбирать пути ее достижения (ОК-1);
- проявлять инициативу, находить организационно-управленческие решения и нести за них ответственность (ОК-6);
- стремиться к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-9);
- уметь критически оценивать свои личностные качества, намечать пути и выбирать средства развития достоинств и устранения недостатков (ОК-10);
- критически осмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости профиль своей профессиональной деятельности (ОК-12);
- анализировать мировоззренческие, социально и личностно значимые проблемы, самостоятельно формировать и отстаивать собственные мировоззренческие позиции (ОК-14);

#### *Профессиональные компетенции (ПК)*

- использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-2)
- владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, работать с компьютером как средством управления информацией (ПК-4)

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен продемонстрировать следующие результаты образования:**

**Бакалавр должен знать:**

- основы математического анализа, дифференциальных уравнений и функций многих переменных (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- теоремы математического анализа, их взаимосвязь друг с другом (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- основные типы задач, решаемые с использованием дифференциальных уравнений и функций многих переменных (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4).

**Бакалавр должен уметь:**

- формализовать прикладную задачу математического и физико-математического характера в терминах дисциплины (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- сформулировать и решить задачу, приводящуюся к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого или второго порядка (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- исследовать задачу на наличие решения и выбирать рациональный способ его поиска (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- оценивать и интерпретировать полученные результаты решения с точки зрения исходной постановки задачи (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4).

**Бакалавр должен владеть:**

- аппаратом исследования и решения определенного класса задач математического анализа применяемых при решении технологических задач, связанных с оборудованием (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- навыками математической формализации прикладных задач (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4);
- навыками анализа и интерпретации решений, полученных в рамках соответствующих математических моделей (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10, ОК-12, ОК-14, ПК-2, ПК-4).

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц (144 часа).

п/п	Дисциплина	Семестр	Неделя	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Коды компетенций	Формы контроля успеваемости.
<b>III</b>	<b>Дифференциальные уравнения. Функции нескольких переменных</b>	3	1-18	Л(18)	ПЗ(54)	СР(36)	ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10	5 нед. – КР, 9 нед. – КР, 12 нед. – КР, 16 нед. – КР. Экзамен
7	Понятие дифференциального уравнения и примеры их составления. Начальные условия (задача Коши). Дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами. Специальная правая часть.	3	1-8	8	24	17	ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10	5 нед. – КР.

8	Функции многих переменных. Частные производные. Дифференцирование. Алгебраические и геометрические приложения дифференцирования функций многих переменных. Двойной и тройной интегралы. Вычисление площадей фигур и объемов тел. Криволинейные интегралы 1-ого и 2-ого рода. Формула Грина.	3	9-18	10	30	19	ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10	9 нед. – КР, 12 нед. – КР, 16 нед. – КР. Экзамен
---	---	---	------	----	----	----	----------------------------------	--

Л – лекции, ПЗ – практические занятия, СР – самостоятельная работа, КР – контрольные работы, ДЗ – домашние задания.

#### 4.1 Содержание разделов дисциплины

##### ***Часть 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.***

Понятие дифференциального уравнения и примеры их составления. Начальные условия (задача Коши). Дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородные уравнения 1-ого порядка. Линейные дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Уравнение Бернулли. Дифференциальные уравнения 1-ого порядка, не разрешенные относительно производной. Дифференциальные уравнения высших порядков. Понижение порядка дифференциальных уравнений. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольной постоянной. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов в случае специальной правой части уравнения. Уравнения Эйлера. Системы дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.

## **Часть 2. Функция многих переменных.**

Область определения. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал. Дифференцирование сложных функций. Дифференцирование неявных функций. Производная по направлению. Понятие градиента и его свойства. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции многих переменных. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций. Замена переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Интегрирование полных дифференциалов.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Двойной интеграл в прямоугольных координатах и его свойства. Замена переменной в двойном интеграле. Вычисление площадей фигур и объемов тел. Криволинейные интегралы 1-ого и 2-ого рода. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Приложения криволинейных интегралов.

### **4.2. Основные темы практических занятий (семинаров)**

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
2. Однородные уравнения 1-ого порядка. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
3. Линейные дифференциальные уравнения 1-ого порядка. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
4. Уравнения Бернулли. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
5. Дифференциальные уравнения 1-ого порядка, не разрешенные относительно производной. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
6. Дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами (общий случай и со специальной правой частью). (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
7. Частные производные. Дифференцирование сложных и неявных функций двух и более переменных. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
8. Производная по направлению. Градиент. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)
9. Кратные интегралы, изменение порядка интегрирования в двойном интеграле. (ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)

## **5. Образовательные технологии**

При реализации программы дисциплины *«Функции многих переменных и дифференциальные уравнения»* используются различные образовательные технологии. Аудиторные занятия проводятся в виде лекций и практических занятий. Во время практических занятий разбираются типовые примеры и задачи курса с целью формирования и развития знаний студентов в области математики. Самостоятельная работа студентов предусматривает как работу под руководством преподавателей (консультации по выполнению домашних заданий, обсуждение вопросов, связанных с лекционным курсом, и подготовкой к контрольным работам, а также разбор ошибок, допущенных студентами, при выполнении контрольных работ), так и самостоятельное выполнение студентом домашних заданий (ДЗ) и подготовку к экзамену по дисциплине. Также к самостоятельной работе следует отнести работу студентов над задачами, необходимыми для углубленного изучения курса. В результате, студент способен на научной основе овладеть навыками самостоятельной работы.

### **6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

В течение преподавания курса *«Функции многих переменных и дифференциальные уравнения»* в качестве форм текущей аттестации бакалавров используются контрольные работы, а также собеседование при приеме домашних заданий и рефератов (защита домашнего задания).

*По дисциплине студенты выполняют два реферата и четыре контрольные работы.*



**Вариант контрольной работы №1 по теме**  
**«Дифференциальные уравнения 1-ого порядка»**

Решить дифференциальные уравнения:

1.  $\frac{1}{\cos^3 x \cos y} + y' \operatorname{ctg} x \sin y = 0;$

2.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2};$

3.  $(y')^2 + 2y' - x = 0;$

4. Решить задачу Коши:  $y' = \frac{x^2 + y^2}{4xy}$ , если  $y(1) = 2$

**Вариант контрольной работы №2 по теме**  
**«Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами»**

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1.  $y'' + 2y' + 40y = 0$

2.  $y^V + y^{IV} + 4y''' + 4y'' + 4y' + 4y = 0$

Не решая, указать вид частного решения неоднородных уравнений:

3.  $y'' - 3y' + 2y = (2x^2 + 1)e^x$

4.  $y'' - 2y' + 5y = e^x (x \sin 4x + (2 + x^2) \cos 4x)$

5. Решить задачу Коши:  $y'' + 3y = \sin \sqrt{3}x$ , если  $y(2\pi/\sqrt{3}) = 0, y'(\pi/\sqrt{3}) = 1$

**Вариант контрольной работы №3 по теме :**  
**«Функции многих переменных. Дифференцирование»**

1. Вычислить частные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$ . Проверить, равны ли вычисленные функции:  $z = (3\sqrt{x} - 1)\sqrt[3]{2y^7 - 6}$

2. Найти  $\frac{dz}{dt}$ , если:  $z = \frac{\arccos 2x}{\operatorname{ctg} 3y}$ ;  $x = 3^{t^2}$ ;  $y = \log_8 5t$

3. Найти  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , если:  $z = \frac{4^{y^3}}{\ln(\operatorname{tg} 2x)}$ ,  $x = v \sin 3u$ ,  $y = u \operatorname{arctg}(-v)$

4. Найти  $\frac{dy}{dx}$ , если:  $(3x)^{\cos 2y} + (\operatorname{tg} 2y)^{3x} - 2 = 0$

5. Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если:  $(3x)^z + (\cos 2y)^{3x} - 2 \operatorname{arctg} y + z = 0$

6. Вычислить производную по направлению  $\vec{l}(1, -2)$  в точке  $(-2, -1)$  для следующей функции:  $z = \frac{1}{\sqrt[5]{x+2y}}$

**Вариант контрольной работы №4 по теме:**

**«Функции многих переменных. Интегрирование»**

1. Найти общий интеграл уравнения

$$xe^{y^2} = -(x^2 ye^{y^2} + \operatorname{ctg}^2 y)y'$$

2. Найдите площадь области, ограниченной линиями, записав соответствующий двойной интеграл

$$y = 2^x, \quad y = 2^{-2x}, \quad y = 4. \quad \text{Сделать рисунок.}$$

3. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} fdy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{-x+1} fdy$$

Сделать рисунок.

*В четвертом семестре запланировано две контрольные работы и одна самостоятельная работа.*

## Вариант экзаменационного билета

### Практическая часть

1. Решить дифференциальное уравнение  $xy' - y + x \sin^2 \frac{y}{x} = 0$

2. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-ого порядка  $y'' + 2y' + 6y = e^x x \cos \sqrt{5}x$

Требуется: 1) найти общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения; 2) не решая, найти вид частного решения данного неоднородного уравнения и записать вид общего решения неоднородного уравнения.

3. Вычислить частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  следующей функции:

$$z = \frac{\operatorname{ctg}(x/y)}{\sqrt[3]{\sin(3 + y \ln x)}}$$

4. Найти  $\frac{dy}{dx}$ , если:  $(2x - 1)^{\arcsin 3y} + (\log_5 4y)^{5x} - 2 = 0$

5. Пусть  $\Omega$  – область, ограниченная линиями  $y^2 = x$ ,  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Требуется: 1) сделать чертеж области  $\Omega$ ; 2) записать формулы для вычисления площади области  $\Omega$  с помощью двойного интеграла, расставив пределы интегрирования двумя способами 3) вычислить площадь области  $\Omega$ .

Для теоретической части выбираются два контрольных вопроса или задания, из числа указанных для промежуточной аттестации в частях 7-8.

**Образцы контрольных вопросов и заданий  
для промежуточной аттестации.**

**Часть 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.  
(ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)**

1. Что такое дифференциальное уравнение? Приведите не менее двух примеров составления дифуров с использованием теории колебаний.
2. Запишите линейное диф. уравнение 1-ого порядка и решите его в общем виде.
3. Запишите однородное диф. уравнение 1-ого порядка и решите его в общем виде.
4. Запишите в общем виде задачу Коши для диф. уравнения 1-ого порядка, разрешенного относительно производной. Покажите пример решения такой задачи
5. Запишите линейное диф. уравнение 1-ого порядка и решите его в общем виде.
6. Запишите уравнение Бернулли и решите его в общем виде.
7. Как найти частное решение неоднородного уравнения с правой частью вида  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ ? Решите пример.
8. Как найти частное решение неоднородного уравнения с правой частью вида  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ ? Решите пример.
9. Преобразовать уравнение  $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ , полагая  $x = \cos t$
10. Дано уравнение Эйлера:  $(-x+1)^2 y'' + (-x+1)y' - 2y = f(x)$ . Покажите, как перейти от данного уравнения к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Полученное уравнение решать не требуется
11. Примените метод вариации произвольной постоянной для решения уравнения  $xy'' - 2xy' + xy = e^x$  Составьте систему уравнений для нахождения неизвестных функций. (решать полученную систему не надо).

12. Запишите в общем виде задачу Коши для диф. уравнения 1-ого порядка, не разрешенного относительно производной. Покажите пример решения такой задачи.

### **Часть 2. Функция многих переменных.**

**(ОК-1, ОК-6, ОК-9, ОК-10)**

1. Найдите и изобразите на чертеже область определения функции
2.  $z = \arcsin \sqrt{xy}$
3. Записать уравнение касательной плоскости к поверхности  $3xyz - z^3 = 8$  в точке  $(0, 2, -2)$ .
4. Записать уравнение нормали к поверхности  $3xyz - z^3 = 8$  в точке  $(0, 2, -2)$ .
5. Запишите второй дифференциал для функции  $z = x \cos(y + 1)$ .
6. Дана функция  $z = f(x, y)$ . Известно, что в точке  $(x_0, y_0)$  выполнено  $f_x = 0, f_y = 0, f_{xx} = 0$ . Является ли точка  $(x_0, y_0)$  точкой экстремума? Ответ поясните. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования экстремума функции  $z = f(x, y)$ ?
7. Исследовать на линейную зависимость систему функций:  $e^{x+1}, e^{2x}, e^{x-1}$
8. Найти решение уравнения  $y' = x + y, y(0) = 1$  с помощью ряда Тейлора-Маклорена. Ограничиться поиском первых трех коэффициентов ряда.
9. Используя понятие полного дифференциала, вычислить приближенно  $(1, 03)^3 \cdot (0, 96)^2$ . Пользоваться калькулятором запрещается.
10. Запишите определение двойного интеграла через предел соответствующей суммы и его свойства
11. Пусть  $C$  - некоторая замкнутая кривая и пусть  $C_1$  - гладкая незамкнутая кривая. Классифицируйте интегралы  $\int_C \sin x dy + y \cos x dx$  и  $\int_{C_1} \sin x dy + y \cos x dx$ . Как зависят эти интегралы от направления пути

интегрирования? Вычислите один из этих интегралов. Почему другой интеграл вычислить нельзя? Ответ поясните.

12. Пусть  $C$  – некоторая гладкая кривая. Классифицируйте следующие интегралы  $\int_C (x + y) ds$  и  $\int_C x dy + y dx$ . Какой из этих интегралов зависит от направления пути интегрирования, а какой нет?

## **7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.**

### **а) основная литература:**

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том 1,2. М.: Наука. – 2005.
2. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Ленанд. – 2015. – 240 с.
3. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1,2: учебник.* – М.: Интеграл-Пресс, 2007.
4. Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике: учебное пособие.* – М.: Айрис Пресс, 2009.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник. Т.3* – М.: Дрофа, 2005 г.
6. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие.* М.: Профессия, 2007.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Любое издание

### **б) Дополнительная литература**

1. Калинин В.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пособие для практических занятий: учебное пособие.* – М. Нефть и газ. 2005.
2. Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие.* – СПб.: Лань, 2002.

3. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) : учебное пособие — М: Высшая школа, 2009
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001.

**в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

<http://www.exponenta.ru>; <http://kvm.gubkin.ru>; <http://www.math.ru/>;  
<http://mathworld.ru/>; <http://allmatematika.ru/>

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций примерной ООП ВПО по направлению подготовки бакалавра 131000 «Нефтегазовое дело» и всем профилям.<sup>1</sup>

Программа одобрена на заседании отделения «Математика и информатика» 27.08.2014 г. филиала РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, протокол № 1.

Программа одобрена на заседании УМК Филиала РГУ нефти и газа им.  
И.М.Губкина в г. Ташкенте от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 года, протокол № \_\_\_.

Автор:



д.ф.-м.н., Ходжиметов А.И.

Заведующий отделением:



проф. Н.Г.Гамквелидзе

Председатель учебно-методической комиссии филиала, заместитель директора по учебной и научной работе



Отто О.Э.

Начальник учебно-методического отдела



Юлдашева Х.К.

Заведующая ИРЦ



Константинова И.Х.

<sup>1</sup> На основе рабочей программы, составленной Д.Л.Белоцерковским на кафедре высшей математики головного ВУЗа