Филиал Российского Государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина в городе Ташкенте

Отделение «Математика и информатика»

Н.Г. Гамкрелидзе, А.И. Ходжиметов

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

ТАШКЕНТ 2013

Филиал Российского Государственного университета нефти и газа имени И.М.Губкина в г. Ташкенте

Отделение «Математика и информатика»

Н.Г. Гамкрелидзе, А. И. Ходжиметов

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

ТАШКЕНТ 2013

Гамкрелидзе Н.Г., Ходжиметов А.И.

Настоящее методическое указание представляет собой естественное пополнение знаний студентов, полученных ими в лицеях и колледжах по решению систем линейных алгебраических уравнений.

Рекомендовано к опубликованию кафедрой высшей математики РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина (28 марта 2013 г.) и учебно-методической комиссией Филиала Российского Государственного университета нефти и газа имени И.М.Губкина в г. Ташкенте (24 мая 2013 г.).

Рецензенты:

1. Юницкий С.А. - к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» РГУ нефти и газа имени И.М.Губкина.
2. Ш.Ф. Мадрахимов - к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой «Программных и сетевых технологий» Национального Университета республики Узбекистан имени М-Улугбека.

1. ВВЕДЕНИЕ

Математическое образование студентов всех технических ВУЗов начинается с изучения основ линейной алгебры, где исходной задачей является изучение произвольных систем линейных уравнений первой степени.

Студентам начальных курсов хорошо знаком метод последовательного исключения неизвестных, применяемый при решении систем линейных алгебраических уравнений. Наряду с этим методом, в случае, когда число уравнений равно количеству неизвестных, используется аппарат теории определителей. Но этот аппарат не применим для изучения систем, у которых число уравнений не равно числу неизвестных. В этом случае используется теория матриц, т.е. систем чисел расположенных в прямоугольных таблицах. Поэтому настоящее методическое пособие начинается с изложения основ теорий матриц и определителей.

Некоторыми вопросами, связанными с решением систем линейных алгебраических уравнений, а также связанных с другими разделами вопросов алгебры, занимались ещё вавилонские, древнегреческие, индийские и китайские математики (Диофант (III век н.э.), Ариабхата (VI век), Брамагупта (VII век) Бхаскара (XII век), Чжан Цан (II век до н.э.) Цзин Чоу-чан (I век н.э.) Цинь-Цзю-шао (XIII век) и др.). Большой вклад в развитие алгебры внесли математики Среднего Востока, в особенности Мухаммад Аль-Хорезми (IX-век) и Омар Хайям (1040-1123). В частности, само слово «алгебра» возникло в связи с заглавием книги Аль-Хорезми «Аль-джабр аль-мукабало».

В дальнейшем, велась интенсивная разработка различных аспектов высшей алгебры, в котором принимали участие ученые всего мира, в том числе и российские ученые (Золотарев Е.И. (1847-1878), Вороной Г.Ф. (1868-1908), Лобачевский Н.И. (1792-1856), Шатуновский С.О. (1859-1929), Граве Д.А. (1863-1939), Н.Г.Чеботарев (1894-1947), Шмидт О.Ю. (1891-1956) и многие другие). Исследования этих ученых захватывают все разделы современной алгебраической науки. В настоящее время, благодаря вышеназванным исследователям, алгебра – как наука приобрела очень большую широту и заняла в математике важное и почетное место.

Целью настоящего методического указания является продолжение ознакомления студентов с основными моментами решения систем линейных алгебраических уравнений, достигнутых благодаря вышеназванным исследованиям. Методическое указание может быть использовано студентами первых курсов всех специальностей Филиала РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина в г. Ташкенте.

2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Матрицы

Пусть задана таблица чисел в виде m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2j} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mj} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.1).$$

Эта таблица называется *прямоугольной матрицей* размера (или порядка) m×n. Числа a_{ij} являются элементами матрицы A и образуют строки и столбцы. Индексы i и j указывают, что элемент находится на пересечении i – й строки и j – го столбца. Для сокращения записи, матрица А может быть записана в следующим виде:

$$A=(a_{ij}) \quad (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$$

или

$$A=\|a_{ij}\| \quad (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}).$$

В случае, когда матрица состоит из одной строки, т.е. m=1:

$$A=(a_{11} \ \ a_{12} \ \ldots \ a_{1j} \ \ldots a_{1n}) \qquad (2.1.2),$$

она называется *матрицей строкой*, а если из одного столбца, т.е. n=1:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \qquad (2.1.3),$$

- *матрицей столбцом.*

Если для матрицы А количество строк равно количеству столбцов, т.е. m=n, то такая матрица называется *квадратной матрицей n-го порядка*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.4).$$

Квадратная матрица имеет *главную и вспомогательную диагонали.* Диагональ, с элементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ – называется *главной*, а с элементами $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – *вспомогательной.*

Если у квадратной матрицы отличны от нуля только элементы главной диагонали, то такая матрица называется *диагональной:*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.5).$$

Если у диагональной матрицы все элементы главной диагонали одинаковые, то такая матрица называется *скалярной* матрицей :

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & a \end{pmatrix}, a\neq 0 \qquad (2.1.6)$$

Если у диагональной матрицы все элементы главой диагонали равны единице, то такая матрица называется *единичной* матрицей и обозначается буквой *E*:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.1.7)$$

Если все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется *нулевой* матрицей и обозначается буквой *Q*:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.1.8).$$

Обозначим через A^T матрицу, полученную путем замены местами строк и столбцов данной матрицы A:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots\ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1.9),$$

эта матрица называется *транспонированной матрицей.*

Если $A = A^T$, т.е. транспонированная матрица равна исходной, то эта матрица называется симметричной, для которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали равны: $a_{ij} = a_{ji}$, при $i \neq j$.

2.2. Действиями над матрицами

Над матрицами можно выполнять операции сложения, вычитания, умножения на число, умножение одной матрицы на другую и нахождение обратной матрицы, а также матрицы можно сравнивать.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового порядка равны, если равны их соответствующие элементы, т.е. при всех значениях индексов i и j выполняется условие:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (2.2.1).$$

Рассмотрим операции над матрицами.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового порядка называется матрица $C=(c_{ij})$ того же порядка, элементы которой определяются по формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad , (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \quad (2.2.2).$$

Сумма матриц обозначается :

$$C= A+B \quad (2.2.3).$$

Т.е для сложения двух матриц одинакового порядка необходимо складывать соответствующие их элементы, при этом суммарная матрица будет того же порядка, что и суммируемые.

Пример: *Найти сумму матриц:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 & 1+(-1) \\ 2+3 & 1+(-2) & -3+1 \\ 0+0 & 1+3 & 4+(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Разность двух матриц определяется таким же образом.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ **на число** λ называется матрица $C=(c_{ij})$, того же порядка, элементы который определяется по формуле:

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad (2.2.4),$$

т.е., для умножения матрицы на число необходимо все элементы матрицы умножить на это число.

Пример: *Умножить матрицу* $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *на 2.*

Решение:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 2\cdot 2 \\ 4\cdot 2 & 2\cdot 2 & 1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Сложение и вычитание матриц, а также умножение матриц на число являются линейными операциями. Для них справедливы следующие правила:

1. A+B=B+A – коммутативность сложения;
2. (A+B)+C=A+(B+C) – ассоциативность сложения;
3. A+Q=Q+A=A – нулевая матрица играет роль нуля;
4. $\mu(\lambda A)=\lambda(\mu A)$;
5. $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$;
6. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

Умножение матриц. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$, размерности (m×k), на матрицу $B=(b_{ij})$, размерности (k×n) называется матрица $C=(c_{ij})$, размерности (m× n), элементы c_{ij}- которого определяется путем суммирования произведений соответствующих элементов i –й строки матрицы А на соответствующие элементы j – го столбца матрицы В:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{1k}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}\cdot b_{lj} \qquad (2.2.5)$$

Произведение матрицы обозначается как

$$C=A\cdot B \qquad (2.2.6)$$

Из определения следует что количество столбцов матрицы А должно быть равно количеству строк матрицы В.

Пример. *Умножить матрицы:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 3 \\ 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ 5\cdot 2+4\cdot 1 & 5\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-1 & 1-3 \\ 4+1 & 2+3 \\ 10+4 & 5+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 5 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$$

Для умножения матриц имеют место следующие правила:

1. (A·B) ·C=A· (B·C) – ассоциативность умножения;
2. (A+B) ·C=A·C+B·C;
3. (λ·A) ·B=λ(A·B);
4. A·E=E·A=A;
5. A·Q=Q·A=Q.

2.3. Определители

Рассмотрим определители 2-го и 3-го порядка. Определителем матрицы 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.3.1)$$

называется число, определяемое по формуле:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{22} \qquad (2.3.2)$$

и обозначается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (2.3.3)$$

Определителем матрицы 3-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (2.3.4)$$

называется число Δ, определяемое по формуле:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \qquad (2.3.5)$$

Для вычисления определителя квадратной матрицы n-го порядка введем некоторые элементарные понятия из теории перестановок.

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – некоторая перестановка чисел 1, 2, …, n. Пара элементов (α_i, α_j), $i<j$, образует инверсию, если $\alpha_i > \alpha_j$. Число всех пар элементов перестановки, образующих инверсию, называется числом инверсий в перестановке и обозначается $inv(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Так, $inv(3,5,1,4,2,6,8,7) = 7$ Инверсию образуют пары (3,1), (3,2), (5,1), (5,4), (5,2), (4,2), (8,7).

Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. Сомножители в каждом слагаемом записываются в порядке следования строк, тогда номера столбцов образуют перестановки; слагаемые, соответствующие четным перестановкам, берутся со знаком «плюс», соответствующие нечетным – со знаком «минус».

В символической записи определитель можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{1\alpha_2} \dots a_{1\alpha_n} \qquad (2.3.6)$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ пробегает все перестановки чисел 1,2,…,n. Множитель $(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)}$ равен +1, если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ - четная перестановка, и равен -1, если нечетная .

Легко проследить, что расстановка знаков в определителях второго и третьего порядков соответствует сформулированному правилу.

2.3.1. Свойства определителей.

Здесь приведем основные свойства определителей, которые используются при их вычислении. Эти свойства очень легко доказываются с помощью правила определителей и не нарушая общности, приведем их для определителей третьего порядка. При приведении свойств определителей, если это свойство относится как к столбцам, так и к строкам, будем говорить «ряд».

1. При транспонировании квадратной матрицы ее определитель не изменяется, т.е.:

$$detA = detA^T \qquad (2.3.7)$$

2. При замене местами двух строк или двух столбцов определитель, изменит свой знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \qquad (2.3.8)$$

3. Если один ряд детерминанта состоит из нулей, то он равен нулю.

4. Если определитель имеет хотя бы две одинаковые строки или столбцы, то он равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.3.8)$$

5. Чтобы умножить определитель на число, достаточно умножить на это число элементы какого-нибудь ряда, т.е. общий множитель, содержащийся во всех элементах одного ряда можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.3.9).$$

6. Если детерминант имеет две пропорциональные строки (столбцы), то он равен нулю.

7. Если один из рядов детерминанта состоит из суммы двух чисел, то этот детерминант равен сумме двух детерминантов:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.3.10)$$

8. Если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца)умноженные на число λ, то детерминант не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.3.11)$$

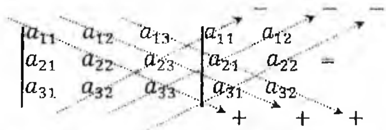
Приведенные выше свойства помогают облегчить вычисление определителей высоких порядков.

2.3.2. Вычисление определителей

Определитель матрицы второго порядка находится по формуле (2.3.2). Для вычисления определителя квадратных матриц 3-го порядка используется формула (2.3.5). При этом эта формула может быть получена правилом Саррюса или правилом треугольников.

Правило Саррюса.

а) для вычисления определителя третьего порядка приписывают снизу первые две строки или справа первые два столбца и берут сумму произведений трёх элементов расположенных на главной диагонали и «прямых» параллельных главной диагонали, со знаком минус берут произведение элементов, расположенных на побочной диагонали и прямых параллельных ей:



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{13}$$

Схема 1. Правило Саррюса вычисления определителей третьего порядка

Правило треугольников: определитель третьего порядка равен алгебраической сумме произведений элементов расположенных на главной диагонали и побочной диагоналях и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными диагоналям. Произведение элементов, расположенных на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными ей, берутся со знаком минус:

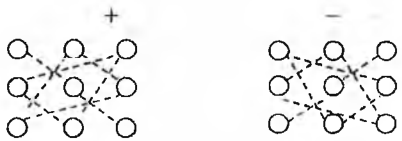


Схема 2. Вычисление определителя третьего порядка по правилу треугольников

Для вычисления определителей более высокого порядка используется приведенное выше правило, что является трудной задачей. Существуют более простые методы вычисления определителей, основанные на том, что определитель порядка *n* можно выразить через определитель более низких порядков. С этой целью вводятся такие понятия, как минор и их алгебраическое дополнение.

2.3.3. Миноры и алгебраические дополнения.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца с данным элементом.

Для простоты рассмотрим определитель 3-го порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минор элемента a_{ik} обозначается через M_{ik}. Например, минор элемента a_{11} будет :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.3.12).$$

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс $(+)$ если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент - число четное, и со знаком минус $(-)$, если это число нечетное. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будет:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik} \qquad (2.3.13).$$

Используя алгебраическое дополнение можно привести следующее правило вычисления определителей: *определитель равен сумме произведений элементов одной строки (столбца) на соответствующие их алгебраические дополнения, т.е.:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (2.3.14).$$

В частности для определителя третьего порядка имеем:

$$\begin{cases} \Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ \Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \\ \Delta = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \end{cases} \qquad (2.3.15)$$

и т.д.

Данное свойство справедливо для определителей любого порядка и может быть использовано для их вычисления. Например, определитель 4-го порядка может быть разложен по элементам первой строки в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4} \cdot a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad (2.3.16),$$

т.е., для вычисления определителя четвертого порядка, необходимо вычислить четыре определителя третьего порядка.

Здесь также необходимо указать, что сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю, т.е.:

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0 \qquad (2.3.15)`$$

При вычислении определителей высоких порядков используя формулу (2.3.16) целесообразно, на основе 8-го свойства (формула (2.3.11)), добиться того, что бы элементы каждого ряда, кроме одного, стали нулями. В этом случае определитель будет равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение, которое на порядок меньше исходного

Пример: Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Решение: Анализ элементов определителя показывает, что проще всего получить три нуля во втором столбце. Для этого прибавим элементы первой строки, умноженные на (-1) к элементам второй строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Теперь умножим элементы первой строки на 5 и сложим с элементами четвертой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Разложим полученный определитель по второму столбцу:

$$\Delta = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -(-56 - 64 + 24 + 96 + 16 - 56) = 40$$

2.3.4. Обратная матрица, ранг матрицы. Приведение матрицы к треугольному виду.

При решении систем линейных уравнений наряду с другими, используется матричный способ, основанный на вычислении обратной матрицы. Введем понятие обратной матрицы и рассмотрим способ ее нахождения.

Пусть нам задана квадратная матрица:

$$A = (a_{ij}),\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \qquad (2.3.17).$$

Если определитель этой матрицы отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то она называется *невырожденной матрицей*, в противном случае - – *вырожденной.*

Если произведение двух квадратных матриц является единичной матрицей, т.е.

$$AB = BA = E \qquad (2.3.18),$$

то матрица B называется *обратной матрицей* для матрицы A или наоборот. Обратная матрица обозначается как A^{-1} . Приведем теорему о существовании обратной матрицы без доказательства (интересующиеся студенты могут посмотреть доказательство в [1].

Теорема: Для того, что бы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1} необходимо и достаточно чтобы матрица A была невырожденной ($\det A \neq 0$). тогда обратная матрица определяется формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.3.19).$$

Таким образом, для получения обратной матрицы A^{-1} необходимо:

1) все элементы матрицы A заменить их алгебраическими дополнениями;
2) транспонировать полученную матрицу (эта матрица называется союзной и обозначается A^*);
3) разделить союзную матрицу на $\det A$;

Пример. Найти обратную матрицу матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение.
Находим определитель :

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то A^{-1}существует.
Находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Союзная матрица имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Разделив союзную матрицу на значение определителя данной матрицы, получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{A}{det\,A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства обратных матриц

Приведем основные свойства обратных матриц:

1°. Обратная матрица данной матрицы единственна.

2°. Определители прямой и обратной матрицы взаимообратные:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \qquad (2.3.20).$$

3 °. Обратная обратной матрицы равна исходной:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (2.3.21).$$

4°. Обратная матрица произведения матриц равна произведению обратных матриц в обратной последовательности:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1} \qquad (2.3.22).$$

5°. Обратная единичной матрицы есть единичная матрица:

$$E^{-1} = E \qquad (2.3.23).$$

6°. Транспонирование и нахождение обратной матрицы не зависит от последовательности этих операций:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad (2.3.24).$$

Ранг матрицы.

Введем понятие ранга матрицы и способ его определения.

Рассмотрим матрицу A размера (m x n):

$$A = (a_{ij}), \ (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}) \qquad (2.3.25).$$

Если в этой матрице выбрать произвольным образом k строк и k столбцов и составить определитель k-го порядка из элементов, которые окажутся на их пересечении, то этот определитель называется минором k-го порядка данной матрицы.

Из строк и столбцов можно матрицы можно составить определители различных порядков k, не превышающих наименьшего из чисел m и n:

$$k \leq min(m,n) \qquad (2.3.26).$$

Общее количество N, миноров матрицы A порядка (m x n), равно:

$$N = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} C_m^k \cdot C_n^k \qquad (2.3.27).$$

Рангом матрицы называется число, равное порядку наибольшего отличного от нуля минора данной матрицы и обозначается r, $r(A)$ или $rang(A)$. Очевидно, что:

$$0 \leq rang(A) \leq \min(m,n) \qquad (2.3.28).$$

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным минором. Так как, у матрицы может быть несколько миноров, определяющих её ранг, то и базисных миноров может быть несколько.

Матрицы A и B называются эквивалентными (эквивалентность матриц обозначается символом ~), если они имеют одинаковые ранги:

$$rang(A) = rang(B) \Rightarrow A \sim B \qquad (2.3.29).$$

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не изменяется:

$$rang(A) = rang(A^T) \qquad (2.3.40).$$

2. Если вычеркнуть из матрицы ряд состоящий из нулей, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Под элементарными преобразованиями матриц понимаются:

1) перестановка местами двух параллельных рядов;
2) умножения всех элементов ряда матрицы на отличное от нуля число;
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоит подряд несколько единиц, а все остальные элементы равной нулю. Такую матрицу называют канонической. При этом, что является очевидным, ранг матрицы будет равен количеству единиц в главной диагонали.

Пример. *Найти ранг матрицы:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Путем элементарных преобразований приведем матрицу к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & -1 & -8 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

На главной диагонали получили три единицы, занчить $rang(A) = 3$

Ранг матрицы также можго определять с помощью теоремы о базисном миноре и метода окаймляющих миноров.

Теорема о базисном миноре: если матрица А имеет отличный от нуля минор *k*-го порядка, а все миноры порядка *k+1*, содержащие данный минор, равны нулю, то ранг матрицы равен *k*.

Метода окаймляющих миноров: находим минор второго порядка отличный от нуля, если такой существует, и вычисляем окаймляющие его миноры третьего порядка, пока не найдем среди них отличного от нуля и т.д. Если найдем отличный от нуля минор *k*-го порядка то вычисляем окаймляющие миноры $k+1$-го порядка. Если все они равны нулю или таких миноров вообще нет, то ранг матрицы равен k, в противном случае этот процесс продолжаем.

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

называется системной линейных алгебраических уравнений, где числа a_{ij} $(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n})$ называются коэффициентами системы, числа b_i $(i = \overline{1,m})$ - свободными членами, x_i $(i=\overline{1,n})$ - неизвестные, подлежащие определению.

Используя теорию матриц эту систему кратко можно записать в виде:

$$A \cdot X = B \qquad (4.2),$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

- матрица коэффициентов системы – называемая *основной матрицей системы*,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

– вектор столбец, элементами которой являются неизвестные x_i, $(i=\overline{1,n})$, системы (4.1),

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

- вектор столбец, элементами которой являются свободные члены b_i, $(i = \overline{1,m})$ системы (4.1).

Расширенной матрицей $\overline{A}$ системы (4.1) называется основная матрица, дополненная столбцом свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_3 \end{pmatrix} \quad (4.6).$$

Решением системы (4.1) называются такие значения x_i, $(i=\overline{1,n})$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система (4.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Такие системы *определенные*, если решение единственное, в противоположном случае *неопределенные*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

Две системы уравнений *эквивалентны*, если они имеют одинаковые решения.

Если все свободные члены системы (4.1) равны нулю, то это система называется однородной. Так как, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ всегда является решением однородной системы, то они всегда совместны. Это решение называется *тривиальным решением*. В случае однородных систем интерес представляет поиск нетривиальных решений.

При решении систем линейных алгебраических уравнений актуальным является вопрос об их совместности. Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает теорема ***Кронекера-Каппели.***

4.1.Теорема Кронекера – Капелли и ее следствия.

Теорема. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, если ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, т.е.:

$$rang(\overline{A}) = rang\ A \quad (4.7).$$

Теорема Кронекера – Капелли дает возможность проверить совместность системы линейных алгебраических уравнений не прибегая к ее решению. Доказательство теоремы приведено в [1].

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных алгебраических уравнений вытекают из следующих следствий из теоремы *Кронекера-Капелли.*

Следствие 1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Следствие 2. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, базируясь на теореме Кронекера-Капелли и ее следствиях, можно привести следующее правило установления совместности произвольных систем линейных алгебраических уравнений:

1) найти ранги основной A и расширенной $\bar{A}$ матрицы системы;

2) если $rang(\bar{A}) \neq rang\ A$, то система не имеет решений;

3) если $rang(\bar{A}) = rang\ A$, то система совместна. При этом если ранг равен количеству неизвестных, то система имеет **единственное решение**, если ранг меньше количества неизвестных, то система имеет **бесконечно много решений**.

Теорема *Кронекера-Каппели* решая вопрос о совместности системы, не дает никакого способа для практического разыскания всех решений системы. Для решения системы уравнений используются различные методы. В настоящем учебно-методическом пособии рассмотрим: правило Крамера, метод Гаусса и матричный способ.

4.2. Метод Гаусса

Этот метод является одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений систем линейных алгебраических уравнений и состоит в последовательном исключении неизвестных. Основы этого метода изучаются в лицеях и колледжах, поэтому студенты с ними знакомы.

Решение системы (4.1) по методу Гаусса состоит из 2-х этапов. На первом этапе (прямой ход), путем элементарных преобразований, система приводится к ступенчатому виду, а на втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных.

Для краткости, а также учитывая, что студенты знакомы с основами метода Гаусса, рассмотрим этот метод на конкретном примере. При этом будем иметь ввиду, что если при приведении системы к ступенчатому виду, появятся нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0=0, их отбрасывают. А появление уравнений вида $0 = b_i$, при $b_i \neq 0$, свидетельствует о несовместности системы.

Замечание. Если ступенчатая матрица окажется треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Учитывая, что студенты знакомы с элементарными преобразованиями матриц, рассмотрим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отбрасывая последние две строки приходим к системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Откуда получим систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 5x_3 \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4 \end{cases}.$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим:

$$x_1 + 3 + 13x_3 - 5x_4 = 2 - 5x_3 .$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4 \end{cases}.$$

Система имеет бесконечное множество решений. Например, при $x_3 = x_4 = 1$ одно из частных решений будет:

$$x_1 = -4;\ x_2 = -11;\ x_3 = 1;\ x_4 = 1$$

4.3. Матричный способ решения

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.8).$$

Основная матрица системы является квадратной матрицей n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.9).$$

Определитель этой матрицы называется определителем системы. Пусть определитель матрицы отличен от нуля, т.е. $\Delta = \det A \neq 0$. Тогда ранг матрицы равен количеству неизвестных и на основе теоремы Кронекера – Капелли система (4.8) имеет единственное решение. Выведем матричный способ решения таких систем.

Систему (4.8), как нам уже известно ((4.2), можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B \qquad (4.10).$$

Умножив обе части (4.10) на A^{-1} слева (A^{-1} обратная матрица основной матрицы системы (4.8)) получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \qquad (4.11).$$

Т.к.

$$A^{-1} \cdot A = E\ , \quad E \cdot X = X \qquad (4.12),$$

то получим:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (4.13)$$

Отыскание решения системы (4.8) с помощью (4.13) называется ***матричным способом решения системы.***

Пример: Решить систему линейных алгебраических уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение: Основная матрица и вектор столбец свободных членов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица Матрицы А, как нам известно из предыдущих примеров,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, на основе (4.13) имеем:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 18 + 10 \\ 6 - 9 + 30 - 20 \\ 3 - 12 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Т.к., X является вектором-столбцом неизвестных, то система имеет решение: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

4.4. Формула Крамера.

Рассмотрим матричное равенство (4.13)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{detA} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{detA} \\ \dots \\ \frac{A_{n1}b_1 + A_{n2}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{detA} \end{pmatrix} \qquad (4.14),$$

Откуда:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{detA} \\ x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{detA} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \frac{A_{n1}b_1 + A_{n2}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{detA} \end{cases} \qquad (4.15)$$

Здесь $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.16)$$

по элементам первого столбца. Этот определитель получается путем замены первого столбца коэффициентов определителя detA столбцом из свободных членов, тогда, обозначив Δ=detA, получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad (4.17).$$

Аналогично, т.к., числители всех дробей в (4.15), являются разложением определителей, которые получаются путем замены соответствующего столбца определителя detA вектором столбцом свободных членов, получим:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (4.18)$$

вкратце можно записать:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; (i = \overline{1, m}) \qquad (4.19)$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Пример. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

Решение. Определим определитель основной матрицы системы, и определители матриц, получаемые из основной путем замены элементов соответствующих столбцов свободными членами системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 8 + 12 + 16 - 6 - 8 = 14,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 22 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -72 + 44 + 24 + 88 - 54 - 16 = 14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 22 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 72 + 88 - 32 - 44 - 72 = 28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 22 \end{vmatrix} = -44 + 16 + 54 + 72 - 12 - 44 = 42.$$

Тогда, на основе формулы Крамера (4.19), получим

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1; \quad x_2 = \frac{28}{14} = 2; \quad x_3 = \frac{42}{14} = 3.$$

Система линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = 0 \end{cases} \qquad (4.20)$$

Очевидно, что $rang(\overline{A}) = rang\ A$. Эта система всегда совместна и имеет тривиальное решение $x_1 = x_2 = \dots\dots\dots x_n = 0$. На практике, интерес представляет ненулевые решения этой системы.

Теорема. Для того, чтобы система однородных уравнений (4.20) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был меньше числа неизвестных, т.е. $rang(A) < n$.

Следствие. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно. чтобы ее определитель был равен нулю. В этом случае система имеет бесконечно много решений.

***Задача** (нулевой вариант контрольной работы)*
Дана неоднородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12 \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 = 39 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Исследовать систему на совместность по теореме Кронекера-Капелли и решить методами Гаусса, Крамера и матричным способом.

Решение.

1) Для исследования системы на совместность по теореме Кронекера-Кепелли определим ранги основной:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 17 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & 39 \end{pmatrix}$$

матриц.

Для определения ранга основной матрицы воспользуемся тем, что ранги эквивалентных матриц одинаковы и путем элементарных преобразований, сведем основную матрицу к треугольной:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} \text{Заменим первую} \\ \text{и третью строку} \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} \text{Поменяем местами} \\ \text{первый и третий столбцы} \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} \text{Умножим строку на единицу и прибавим} \\ \text{ко второй строке, а затем умножим первую} \\ \text{строку на } (-3) \text{и сложим с третьей строкой} \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & 11 & 9 \\ 0 & -22 & -16 \end{pmatrix} \sim \left\| \begin{matrix} \text{Умножим первый столбец на}(-8) \\ \text{и сложим со вторым столбцом, затем} \\ \text{умножим первый столбец на } (-7) \text{и сложим} \\ \text{с третьим столбцом} \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 9 \\ 0 & -22 & -16 \end{pmatrix} \sim \| \text{Разделим второй столбец на } 11 \| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -16 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \text{Разделим третью строку на}(-2) \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} \text{Умножим элементы второй строки на}(-1) \\ \text{и прибавим к элементам третьей строки} \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} \text{Элементы второго столбца умножим на } (-9) \\ \text{и пибавим к соответсвующим элементам} \\ \text{третьего столбца} \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\| \text{Элементы третьей строки умножим на } (-1) \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Как видно, ранг полученной элементарными преобразованиями матрицы, равен 3. Так как эта матрицы эквивалентна основной, то ранг основной матрицы также равен 3.

Определим ранг расширенной матрицы. Так как расширенная матрица имеет порядок (3× 4), то её ранг не может быть больше 3. Основная матрица входит в состав расширенной матрицы и её ранг, как мы уже получили равен 3. Поэтому в таких случаях нет необходимости определения ранга основной матриц и ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы, т.е. равен 3.

Согласно теоремы Кронекера-Капелли, данная система совместна и имеет единственное решение, так как число неизвестных равен рангу основной матрицы.

I) Исследовав совместность системы согласно теоремы Кронекера–Капелли, приступим к сс решению.

а) Решим данную систему методом Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Преобразуем систему исключая, путем линейных преобразований, из второго и третьего уравнения неизвестное x_1. Здесь следует заметить, что из второго и третьего уравнения можно исключить так же неизвестные x_2 или x_3 .

Первое уравнение умножим на 2 и сложим со вторым уравнением, умноженным на (-5), а затем первое уравнение умножим на 7 и сложим с третьим уравнением, умноженным на (-5):

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ \quad -19x_2 + 11x_3 = -46 \\ \quad -54x_2 + 16x_3 = -146 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Системы уравнений (3.1) и (3.2) эквивалентны и обладают одними и теми и же решениями. Аналогичным образом преобразуем полученную систему, для чего из третьего уравнения исключим неизвестную x_2. Умножим второе уравнение системы на 54, а третье на (-19) и сложим полученные уравнения :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -19x_2 + 11x_3 = -46 \\ 290x_3 = 290 \end{cases} \qquad (3.3)$$

Системы уравнений (3.2) и (3.3) эквивалентны. Из последнего уравнения системы (3.3) определим неизвестную x_3:

$$x_3 = \frac{290}{290} = 1$$

Подставляя найденное значение x_3 во второе уравнение системы (3.3) определим x_2:

$$-19x_2 + 11 \cdot 1 = -46,$$

откуда:

$$x_2 = \frac{-57}{-19} = 3.$$

Подставляя значения x_3 и x_2 в первое уравнение системы (3.3) определим x_1:

$$x_1 = \frac{10}{5} = 2.$$

Проверим достоверность полученных решений, для чего подставим полученные значения неизвестных в уравнения системы (3.1):

$$\begin{gathered} 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 10 - 6 + 3 = 7 \\ 2 \cdot +3 \cdot 3 - 1 = 4 + 9 - 1 = 12 \\ 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 1 = 14 + 24 + 1 = 39 \end{gathered}$$

Все уравнения выполняются значит полученные решения достоверны. Если про проведении проверки мы получаем недостоверные результаты, то необходимо проверить подсчет коэффициентов эквивалентных систем или решения линейных уравнений.

б) Решим систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера, для чего определим значения определителя Δ основной матрицы A и значения определителей $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ матриц, полученных путем замены соответствующего столбца основной матрицы свободными членами системы.

$$\Delta = detA = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 15 + 14 + 48 - 63 + 40 + 4 = 58,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 12 & 3 & -1 \\ 39 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 21 + 78 + 288 - 351 + 56 + 24 = 116,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 12 & -1 \\ 7 & 39 & 1 \end{vmatrix} = 60 - 49 + 234 - 252 + +195 - 14 = 174,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 12 \\ 7 & 8 & 39 \end{vmatrix} = 585 - 168 + 112 - 147 - 480 + 156 = 58.$$

Определим значение неизвестных согласно метода Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{116}{58} = 2$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{174}{58} = 3$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{58}{58} = 1$$

Полученные решения совпадают с полученными ранее, задача решена верно.

в) решим систему матричным способом.

Основная матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы известен $\Delta = det\, A = 58$. Найдем обратную матрицу, для чего вычислим алгебраические дополнения каждого элемента и построим союзную матрицу:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 7) = -9,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 21 = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 24 = 26,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 21 = -16,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 - 14 = -54,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19.$$

Союзная матрица имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 11 & 26 & -7 \\ -9 & -16 & 11 \\ -5 & -26 & 19 \end{pmatrix},$$

Тогда обратная матрица будет следующей:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{11}{58} & \frac{26}{58} & -\frac{7}{58} \\ -\frac{9}{58} & -\frac{16}{58} & \frac{11}{58} \\ \frac{-5}{58} & -\frac{26}{58} & \frac{19}{58} \end{pmatrix}.$$

Проверим достоверность обратной матрицы, для чего умножим ее на основную матрицу системы, должна получиться единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{58} & \frac{26}{58} & -\frac{7}{58} \\ -\frac{9}{58} & -\frac{16}{58} & \frac{11}{58} \\ \frac{-5}{58} & -\frac{26}{58} & \frac{19}{58} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{58}(11 \cdot 5 + 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5) & \frac{1}{58}(26 \cdot 5 + 2 \cdot 16 - 3 \cdot 54) & \frac{1}{58}(-7 \cdot 5 - 2 \cdot 11 + 3 \cdot 19) \\ \frac{1}{58}(11 \cdot 2 - 3 \cdot 9 + 1 \cdot 5) & \frac{1}{58}(26 \cdot 2 - 3 \cdot 16 - 1 \cdot 54) & \frac{1}{58}(-2 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 19) \\ \frac{1}{58}(11 \cdot 7 - 8 \cdot 9 - 1 \cdot 5) & \frac{1}{58}(26 \cdot 7 - 8 \cdot 16 - 1 \cdot 54) & \frac{1}{58}(-7 \cdot 7 + 8 \cdot 11 + 1 \cdot 19) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили единичную матрицу, что говорит о том, что обратная матрица построена правильно. Для определения решения системы умножим обратную матрицу A^{-1} слева на матрицу-столбец свободных членов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{58} & \frac{26}{58} & -\frac{7}{58} \\ -\frac{9}{58} & -\frac{16}{58} & \frac{11}{58} \\ \frac{-5}{58} & -\frac{26}{58} & \frac{19}{58} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{58}(11 \cdot 7 + 12 \cdot 26 - 7 \cdot 39) \\ \frac{1}{58}(-9 \cdot 7 - 16 \cdot 12 + 11 \cdot 39) \\ \frac{1}{58}(-5 \cdot 7 - 54 \cdot 12 + 19 \cdot 39) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{116}{58} \\ \frac{174}{58} \\ \frac{58}{58} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 1.$$

Решение, полученное матричным способом совпало с решениями, полученными методами Гаусса и Крамера, система решена верно.

Для закрепления знаний по решению систем линейных неоднородных алгебраических уравнений, предлагаем студентам самостоятельно решить следующие задачи, которые также могут быть использованы преподавателями для проведения контрольной работы.

Задачи для самостоятельного решения. Системы линейных неоднородных алгебраических уравнений исследовать по теореме Кронекера-Капелли и решить методом Гаусса, Крамера и матричным способом.

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x - 3y + z = 7 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + y + 4z = 12 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ -3x + 2y - z = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ x + 2y + 6z = 6 \\ 2x - y + 3z = 8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 2x - y - 5z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ 3x + y - 3z = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 5 \\ x + 2y - 2z = 3 \\ -2x + 3y + 4z = 15 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - 4z = -10 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 4z = -4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -3x + y + 3z = 5 \\ 4x + 5y - z = -10 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 2x + 6y - 5z = 0 \\ x + 3y + 4z = 13 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ x + 2y + 6z = 6 \\ 2x - y + 3z = 8 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ 3x + y - 3z = 5 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ 2x - y + 4z = 10 \\ -3x + 4y + z = 4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 8 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 4y + z = 8 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 11 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x - y - z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 14 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -3 \\ x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + y - 3z = 7 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 9 \\ 3x - 2y + 4z = 6 \\ x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 5y - 3z = -10 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 5x + 3y - 4z = 22 \\ 2x - 2y + 5z = -1 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x - 4y + 3z = 4 \\ x + 5y + 2z = 17 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 6 \\ 2x + 4y - 3z = 9 \\ 7x + 2y + z = 19 \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ 4x - 6y + 5z = -13 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 2x + 6y - 5z = 0 \\ x + 3y + 4z = 13 \end{cases}$

28) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + 4y - z = 10 \\ 5x - 6y + 3z = -2 \end{cases}$

29) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 5y + 4z = -8 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = 15 \\ x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$

Список использованной литературы:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: «Наука». – 1968. – 432 с.
2. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч.1. – М.: Айрис-пресс. - 2006. - 288с.
3. Г. Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: «Наука». – 1978. – 832 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии . Санкт-Петербург: «Профессия». – 2002. - 200 с.
5. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н.Федин, Ю.А.Шевченко. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч., Ч.1. – М.: Айрис-пресс. – 2008. – 576 с.
6. Бугров Я.С, Никольский С. М. Сборник задач по высшей математике. М.: «Физматлит». - 2001.-304 с.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. www.kodges.ru

Гамкрелидзе Николай Георигевич – д.ф.-м.н., профессор
Ходжиметов Алиназар Ирисметович- д.ф.-м.н.,

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ РЕШЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Ташкент, Филиал Российского Государственного университета
нефти и газа им. И.М.Губкина, 2013 г.

Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Изд. № 711/2013. Тираж 50 экз.

Типография филиала Р.Г.У. нефти и газа

имени И. М. Губкина в городе Ташкенте